ENSAYO

PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN FRACCIONES

Teaching proposals for developing fraction mathematical competencies

Miguel Friz Carrillo[1], Susan Sanhueza Henríquez[2], Alejandra Sánchez Bravo[3], Marta Belmar Mellado[4], Ernesto Figueroa Manzi[5]

[1]Departamento de Ciencias de la Educación, Facultad de Educación y Humanidades. Universidad del Bío-Bío. Casilla 447, Chillán, Chile. mfriz@ubiobio.cl
[234]Departamento Psicología de la Salud, Universidad de Alicante. España. AP. de correos, 99-03080, Alicante, España. susan.sanhueza@ua.es / acsb1@alu.ua.es / mebm6@alu.ua.es
[5]Ministerio de Educación, Chile. Dirección Provincial de Educación de Ñuble, Edificios Públicos s/n, Chillán, Chile. ernesto.figueroa@mineduc.cl

Resumen

El trabajo tiene como propósito abordar las fracciones como contenido. Se hace referencia al significado, conceptualización y justificación de su presencia en los currículos oficiales y se proporcionan situaciones didácticas para ser implementadas y evaluadas en un quinto año de Educación Básica. Junto con graduar las competencias matemáticas implicadas en el aprendizaje de las fracciones, se analizan las principales dificultades que encuentran los estudiantes para comprenderlas.

PALABRAS CLAVE: Fracciones, matemáticas, competencias, evaluación

Abstract

The aim of this work is to deal with fraction contents in relation to notions such as meaning, conceptualization and justification of fraction presence in the official curriculum. Teaching methodological situations are presented in order to be implemented and assessed in the fifth year of Primary Education. Along with grading mathematical competencies involved in the fraction learning process, students' major understanding difficulties are analysed.

KEYWORDS: Fractions, mathematics, competencies, assessment

Recibido: 29/04/08 Aceptado: 14/11/08

INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar la propuesta, es importante mencionar el sentido de la enseñanza de las matemáticas en el Segundo Ciclo de Educación General Básica. ¿Qué es lo que debe aprender el alumno en este ciclo de acuerdo a los programas oficiales? ¿Cuál es la matemática requerida en la sociedad moderna? ¿Existe un distanciamiento entre ambas intenciones? Si bien no es el propósito intentar dar respuesta a estas cuestiones, sí es importante aclarar que existe consenso en que la matemática de hoy debe estar centrada en valores, hábitos, actitudes, habilidades y conocimientos que permitan a los estudiantes integrarse a la vida social. Esto implica una actitud positiva hacia las matemáticas, formas de razonar y resolver problemas diversos y toma de conciencia de sus propias capacidades.

Las situaciones[1] didácticas que se presentan en este trabajo se fundamentan en un enfoque denominado cognición situada, por lo que se resalta el valor del contexto en que ocurre el aprendizaje y las formas de estructurar el pensamiento matemático. Asimismo, la situación es abordada desde múltiples dimensiones, a saber, desde la disciplina matemática en torno al saber que entra en juego; la psicología del aprendizaje a través de las formas en que los estudiantes procesan la información y desarrollan estructuras cognoscitivas y desde el componente didáctico necesario para que el aprendizaje ocurra.

El objetivo es abordar el contenido de fracciones, específicamente para un Quinto Año de Educación General Básica en coherencia con los Planes y Programas de estudio vigentes para este subsector, según el Ministerio de Educación de Chile, e integrarlos a través de la estrategia de resolución de problemas para lo cual se plantean en detalle las diversas fases que la componen. En cada una de ellas, se mostrarán las principales dificultades que van presentado los alumnos, propuestas para superar estos obstáculos y formas de actuación del profesorado como mediador de los aprendizajes matemáticos.

La propuesta debe adecuarse al grupo de alumnos, sus características, estilos de aprendizaje y motivaciones. Estamos seguros de que el material ofrece orientaciones iniciales que pueden enriquecerse con un trabajo comprometido de los profesores.

Fracciones y su aplicabilidad en la vida diaria

Primer supuesto: el lenguaje fraccionario está dotado de significatividad.

Es muy común que dentro del lenguaje cotidiano el alumno tenga incorporado de forma espontánea un lenguaje fraccionario. La mayor parte del tiempo estas aproximaciones se encuentran asociadas a unidades del sistema métrico decimal, por ejemplo, de periodos temporales como cuando acuerdan una cita a medio día, o de capacidad como la compra de una bebida de un litro y medio, o bien de peso cuando van de compras por un kilo de manzana, medio de naranjas etc. Sin embargo, si bien este lenguaje ya posee un significado de forma internalizada, generalmente nuestros alumnos no logran hacer conscientes las implicancias que estos enunciados tienen, vale decir, si bien desean recibir la mitad de un sándwich, no están pensando en la relación que esta porción tiene con el sándwich entero. Desde el punto de vista del profesor, la significatividad está

[1] El término se aplica desde el enfoque planteado por Brousseau (1998) y se refiere a la situación que se lleva a cabo en una clase entre el profesor y sus estudiantes en torno a un saber matemático. Incluye el planteamiento de una o varias hipótesis de trabajo.

relacionada íntimamente con el *sentido de la matemática*. Veamos uno de los posibles sentidos relacionados con nuestro tema. La relación fracciones-razones con rendimientos o tasas de un entorno cotidiano, conforman una sólida base para la diacronía de este concepto, pues es posible realizar diferentes transiciones conceptuales. El rol del profesor, como articulador de estos tópicos, es fundamental. Además, se debe dar mayor relieve a la importancia del trabajo con las unidades correspondientes (trabajar con cantidades y no con números, como una aproximación a lo concreto), pues permite hacer más fácil la modelación de aspectos cotidianos a través de razones. Describamos estas transiciones:

- En el Primer Ciclo, es bastante común trabajar con series (sucesiones propiamente tal) de números enteros (2, 4, 6, 8, …,n). Como observamos, aquí cada término está aumentado en dos; si representamos esta situación en términos de una expresión la estableceríamos como:

  $y = 2\left\lfloor \frac{\text{unidades}}{\text{tér mino}} \right\rfloor \cdot x$, con x = 1, 2, 3, …n/2

  Si generalizamos, tendremos $y = k \cdot x$.

- En Segundo Ciclo, el trabajo con proporcionalidad se presta para seguir modelando situaciones cotidianas, donde los problemas y ejercicios siguen el modelo $y = k \cdot x$, donde k corresponde a la constante de proporcionalidad y sigue teniendo el mismo significado.

- En Enseñanza Media, se trabaja fundamentalmente a partir de la recta. En NM1 se sigue con y = k·x_; en NM2 agregamos la constante o intercepto y tenemos la recta $y = a + m \cdot x$, donde m sigue siendo una fracción (la pendiente propiamente tal); en NM3 encontramos el modelo $y > (<) a + m \cdot x$; en NM4, se incluyen modelos potenciales como $y = k \cdot x^m$, donde k sigue teniendo el mismo sentido. Estas expresiones sientan las bases en algunas direcciones importantes para el profesor en términos de la articulación entre ellas. La primera, relativa a la construcción de expresiones; la segunda, la construcción de tablas; y la tercera, la elaboración de gráficos. La utilización de éstas como herramientas didácticas debe obedecer a una muy buena articulación del profesor. Y, en esta misma dirección, un aspecto que atañe a este sentido, es el referido al *tratamiento de la información*, pues las variables descritas como $y = k \cdot x$ y $y = a + m \cdot x$, nos permiten relacionarlas con variables de razón y de intervalo, respectivamente.

- En el nivel superior, la fracción representada como tasas de cambios, tiene extrema importancia, pues es el concepto previo para trabajar con derivadas e introducirnos en la complejidad infinitesimal. Uno de los orígenes de donde surge este concepto es el de la velocidad instantánea, nuevamente una aplicación de las fracciones.

Como apreciamos, este recorrido es relevante si pensamos que una de las principales habilidades es la capacidad de modelar.

Segundo supuesto: las fracciones pueden ser conceptualizadas de diferentes maneras.

Las diferentes nociones de fracción se presentan sucintamente a través de modelos que han surgido durante el desarrollo histórico.

- Las fracción como parte de un todo.

La fracción como una o varias partes de un objeto de referencia (la unidad), por ejemplo n/m, es decir la unidad se ha dividido en m partes iguales (equivalentes) y se han tomado n de ellas.

- La fracción como resultado de un reparto equitativo.
  Repartir n objetos de un tipo a m objetos de otro tipo, originando fracciones que representan *el resultado del reparto.*
- La fracción a partir del problema de la medida.
  La medición de magnitudes continuas requiere cuantificarlas mediante números que permitan tomar una parte de ella, es decir, cuando la medida no es un entero. Así como los enteros son útiles para el conteo, las fracciones lo son para la medición de magnitudes.
- La fracción como operador aritmético.
  Una Ley o Regla que actúa sobre un conjunto determinado, provocándoles una transformación homogénea a todos los involucrados, es decir, asocia cada elemento de un conjunto de inicio con los elementos de un conjunto de llegada. Esta asociación es realizada por el operador (que carece de magnitud).
- La fracción como solución de ecuaciones algebraicas.
  En el desarrollo de la resolución de la ecuación $m \cdot x = n$, con m,n en Z y $n \neq 0$, se origina la fracción n/m, como el cociente entre n y m.

La auténtica comprensión del concepto de fracción sólo puede alcanzarse mediante presentaciones plurales de dicho concepto, es decir, lograr la articulación de las distintas representaciones. En definitiva, lo importante es incluir aspectos que potencian el papel de las fracciones como razón, como transformación, como cociente de números naturales en situaciones de reparto, su vinculación con los decimales. (Llinares, 2003)

Tercer supuesto: las fracciones deben estar presentes en el currículum escolar.

Si los profesores logran realizar una adecuada enseñanza de las fracciones, dando profundidad y dotando de utilidad este saber, aumentaría su uso en situaciones de la vida diaria y resultaría aún más familiar su lenguaje. Ha sido cuestionada la presencia de este contenido en los currículos oficiales; sin embargo, desde nuestra perspectiva debe mantenerse entre otras razones porque el cálculo con fracciones ayuda a trabajar posteriormente o simultáneamente con proporciones, también porque operaciones como la multiplicación y división de decimales sólo pueden entenderse si se conocen las operaciones con fracciones. Otros autores (Llinares y Sánchez, 1997) piensan que son esenciales como factores de comparación de cantidades o como un fundamento para relaciones algebraicas posteriores.

PROPUESTA METODOLÓGICA

El aprendizaje de las fracciones debe tender al desarrollo de competencias matemáticas, por lo tanto, se deben contemplar procedimientos de tipo cognitivo como relacionar, asociar, comparar, anticipar, verificar, argumentar, comunicar; y también involucra actitudes positivas como la autocrítica, el trabajo en equipo, la transferencia de situaciones a la vida cotidiana de los alumnos. Es deseable que el trabajo sea desarrollado en pequeños grupos, a fin de posibilitar la discusión, contraargumentación y un pensamiento divergente. De la misma forma, no se debe olvidar que los conocimientos previos juegan un papel fundamental en las experiencias; una buena estrategia para sistematizarlos sería a través de un esquema, una figura, un diagrama o una tabla. Para este trabajo, lo recomendable sería que el alumno pudiera discriminar el orden entre diferentes fracciones a través de algoritmos o esquemas concretos. Muchos problemas se hacen más transparentes a través de una representación adecuada de los elementos más relevantes que intervienen en la situación.

El profesor debe ser un *mediador* que posibilite la mayor comprensión y manejo de cada proceso cognitivo, al mismo tiempo que permita al niño la mayor transferencia posible a todas las situaciones de aprendizaje no solo escolar, sino también extraescolar. Debe transformar su quehacer pedagógico tradicional en un verdadero desafío de "aprender a aprender", por lo tanto, para la propuesta nos adscribiremos a la estrategia de resolución de problemas propuesta por Valls (2007), que considera las siguientes fases sobre las cuales se "problematizará" a los alumnos en el saber matemático de las fracciones:

Primero. Comprender el problema
Leer el enunciado, identificar lo que se sabe (los datos del problema) y lo que se pide (la pregunta), usar alguna representación que ayude a comprender mejor el problema: materiales, diagrama, papel cuadriculado etc. y expresar el enunciado con las propias palabras.

Segundo. Buscar una o varias estrategias de resolución
Hacer un esquema, una figura, un diagrama, una tabla, experimentar para tratar de identificar o conjeturar alguna propiedad, observar patrones o regularidades, estudiar casos particulares, usar el ensayo y error, eliminar una condición, suponer el problema resuelto: pensar desde el final o buscar un problema semejante.

Tercero. Aplicar la estrategia seleccionada
No desmotivarse fácilmente y tratar de llegar hasta el final, pero si la estrategia no funciona, buscar otra.

Cuarto. Revisar el proceso
Explicar, cuando se tenga una respuesta, lo que se ha hecho de forma que otra persona pueda entenderlo, intentar resolverlo utilizando una estrategia diferente o preguntarse qué ocurriría si se cambian los datos, las condiciones del problema o la pregunta.

Situaciones didácticas

Competencia: Lectura, Escritura y Comparación de Fracciones.

Situación: Como actividad previa, se debe verificar que los estudiantes puedan comparar fracciones y ordenarlas. El profesor/a les comenta a sus alumnos que vio por televisión una carrera de autos[2] y pregunta a sus alumnos/as ¿Quién ha visto alguna? ¿Qué les parece?, etc. Luego les cuenta que en esta carrera hubo tres competidores que no completaron el recorrido. Uno alcanzó a realizar sólo 3/4 partes, otro 1 1/2 del recorrido y el otro sólo 5/3 del recorrido (¿qué se espera que el estudiante interprete aquí?). Le pregunta a sus alumnos/as ¿Cuál de estos tres competidores cubrió mayor parte del recorrido?

Seguramente, las respuestas serán variadas, entonces el profesor/a invitará a sus alumnos/as a descubrir que fracción representa un mayor valor numérico.

1. Los alumnos forman grupos de trabajo (4-5 integrantes). Cada grupo recibe dos dados de distinto color (uno representará el numerador y el otro el denominador). Además de

[2] Sugerencia: especificar que la pista no es circular ni ovalada, pues trae a escena el ingrediente que deben partir desde distintas posiciones, para recorrer lo mismo.

una tarjeta de registro por niño.
Cada niño realiza un lanzamiento, lee en voz alta la fracción obtenida y la registra en su tarjeta usando números y letras. Posteriormente, representa el valor obtenido al reverso de la tarjeta. Luego, el grupo ordenará las fracciones obtenidas siguiendo un criterio (menor – mayor / mayor – menor). Al término de esta etapa, todos los niños han leído, escrito, dibujado y comparado fracciones a nivel grupal.

2. Cada grupo ubicará la fracción menor y mayor que hayan obtenido en la recta numérica que estará representada en la pizarra.
3. A nivel del curso, determinarán qué fracción es mayor, menor y cuáles representan el mismo valor. Comentarán el trabajo realizado y lo aprendido.

Al término de esta etapa, el profesor recuerda la interrogante que planteó al comienzo de la clase ¿Cuál de los competidores cubrió un mayor trayecto del recorrido? Los alumnos podrán responder apoyándose en el trabajo realizado y si aún quedan dudas podrán recurrir a la recta numérica que estará representada en la pizarra. Al finalizar la unidad didáctica se espera que los alumnos logren leer, escribir y comparar fracciones; empleen una estrategia didáctica y resuelvan colaborativamente un problema; además de iniciarse en la ubicación de fracciones en la recta numérica.

Competencia: Ubicación de Fracciones en la Recta Numérica.

Situación: El profesor representa una pista atlética en la pizarra. Les presenta gráficamente a atletas de distintas nacionalidades y/o culturas y les señala que estos deportistas se destacan por ser grandes velocistas. Les comenta que en el último campeonato el velocista Nigeriano fue el vencedor y que completó el recorrido en sólo 2 minutos (en dos minutos se recorren más de 800 metros, a nivel mundial, y si alguien conoce este tema dirá que en la segunda vuelta los atletas comparten la misma pista, sugiero 1 minuto, pues son menos de dos vueltas) y que los demás deportistas sólo alcanzaron a recorrer una parte del trayecto (cada atleta tendrá en su camiseta escrita la fracción correspondiente al recorrido que completó). Invita a los alumnos a ubicarlos en la pista atlética y averiguar qué posición ocuparon en la carrera.

1. Entrega cada figura a los alumnos que están interesados en ubicar a los velocistas en la pista atlética.
2. Posteriormente, motiva a los alumnos a pronunciarse con respecto a los resultados de la carrera, y a comentar sobre el valor posicional de las fracciones.

Al término de esta etapa el profesor ha trabajado con los alumnos/as la ubicación de fracciones en la recta numérica y podrá visualizar las competencias de los alumnos/as en relación al tema.

Posteriormente, continúa el proceso de enseñanza-aprendizaje dividiendo el curso en grupos de trabajos (4-5 alumnos/a).

1. Estimula a los alumnos/as a encontrar fracciones que cumplan con los siguientes requisitos y a ubicarlas en la recta numérica que tendrá cada grupo. Por ejemplo, se podría solicitar que busque tres fracciones entre 0 y 1 unidad, dos fracciones que se ubiquen entre 1 y 2 unidades, etc. Los alumnos podrán utilizar distintas estrategias para identificar las fracciones requeridas. Por ejemplo, podrán apoyarse en el lanzamiento de dados, en la representación gráfica, en trabajos previos, etc.
2. Cada grupo expondrá su trabajo al

curso y comentará sobre aspectos de su realización (estrategia utilizada, organización del trabajo, dificultades, etc.).

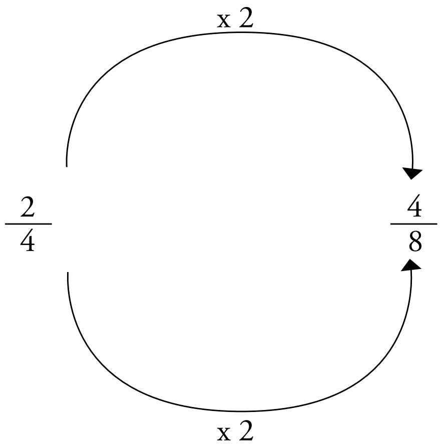
Al término de esta etapa los alumnos/as han comparado distintas fracciones y seleccionado sólo las que cumplen cierto requisito relativo al valor posicional y las han ubicado en la recta numérica. Además han podido apreciar el trabajo de otros y aprender de estos. Al finalizar la unidad didáctica se espera que los alumnos puedan identificar, comparar y determinar el valor posicional con respecto a la recta numérica de distintas fracciones. Han podido elegir en forma grupal la estrategia para resolver un problema y, además han apreciado otras formas de hacerlo.

Competencia: Fracciones Equivalentes.

Situación: El profesor/a recuerda a sus alumnos/as que en clases anteriores han descubierto que existen fracciones que aun teniendo distintos numerador y denominador tienen el mismo valor. Les recuerda, por ejemplo, que en la carrera de autos uno de estos recorrió 1/2 del trayecto, otro 4/8 y un tercero 2/4, y que al ubicarlos en la recta numérica pudieron comprobar que habían cubierto el mismo trayecto.

1. Un alumno/a registra en la pizarra los trayectos que recorrieron los vehículos en forma de fracción.
2. Un alumno/a ordena las fracciones registradas siguiendo el criterio de menor a mayor numerador.
3. El profesor/a motiva a los alumnos/as a responder la siguiente pregunta: ¿Qué relación existe entre las fracciones?
4. Las respuestas serán registradas en la pizarra. Ejemplos de respuestas pueden ser:
    - Ninguna relación
    - La primera (1/2) es más chica
    - La tercera (4/8) es la más grande
    - La tercera (4/8) es el doble de la segunda (2/4)

El profesor/a dirige la comprobación de hipótesis preguntando y contra preguntando a sus alumnos/as, rápidamente podrá descartar las hipótesis que no se sustentan, quedándome con la que correcta. De no haber sido propuesta anteriormente por los alumnos el profesor la propondrá para su comprobación: "El numerador y el denominador de la tercera fracción representan el doble del numerador y denominador de la segunda fracción". Pide la opinión a los alumnos ¿Será 4/8 el doble de 2/4? ¿Cómo podemos comprobarlo? Se procede a la comprobación.



Una vez comprobada esta hipótesis se pregunta a los alumnos/as si pueden apreciar otra relación entre las tres fracciones que fueron anotadas en la pizarra. Posiblemente los alumnos dirán que la segunda es el doble de la primera. La idea es conducirlos mediante preguntas sucesivas a la siguiente respuesta "el numerador y el denominador de la primera fracción 1/2 representa la mitad del numerador y denominador de la segunda fracción 2/4. Se procede a la comprobación.

:2

$$\frac{2}{4} \div \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$$

: 2

Al término de esta etapa los alumnos/as han podido comprobar que una fracción equivalente se obtiene multiplicando o dividiendo por un mismo número, tanto el numerador como el denominador. El profesor propone repetir el procedimiento con otro grupo de fracciones equivalentes. Por ejemplo: 3/2, 6/4 y 12/8. Luego de haber aprendido y comprendido el procedimiento, se enseña a los alumnos otra forma de comprobación.

$\frac{3}{2} \bowtie \frac{12}{8}$ Son equivalentes porque 3 x 8 = 2 x 1

Al término de esta etapa los alumnos han participado activamente en la identificación y comprobación de fracciones equivalentes. Posteriormente, queda ejercitar en pequeños grupos y en forma individual. Al finalizar la unidad didáctica se espera que los alumnos hayan identificado fracciones equivalentes, puedan establecer relaciones entre ellas y comprobar su equivalencia.

Competencia: Adición y Sustracción de fracciones.

Situación: El profesor pregunta a sus alumnos/as ¿Quién conoce un huerto? ¿Qué producto se cultiva? ¿Algún familiar trabaja en un huerto?, etc. Luego les comenta que él conoce el huerto de don Arturo y se los caracteriza. Posteriormente, les señala que el agricultor le dio como información que 3/8 del huerto está sembrado con tomates, 2/8 partes con porotos verdes y 1/8 del terreno con arvejas. Pregunta a sus alumnos ¿Qué fracción o porción del huerto de Don Arturo está sembrado? La resolución del problema se llevará a cabo en la pizarra, para que todos los alumnos/as puedan participar. Para encontrar la respuesta, los alumnos tendrán que identificar datos y pregunta, seleccionar la estrategia de resolución, usar la estrategia operativa y elaborar la respuesta.

1. Primero, los alumnos/as identificarán los datos y los registrarán en el pizarrón.

Tomates	porotos	arvejas
3/8	2/8	1/8

2. Registrarán y analizarán la pregunta para comprender exactamente qué se quiere averiguar. Se motivará a los alumnos a redactarla con sus propias palabras.
3. El profesor motivará a los alumnos a proponer estrategias de resolución. Posiblemente propongan: dibujar el huerto representando las partes sembradas, sumar todas las fracciones; un niño podría decir que no se pueden sumar porque son distintas verduras; otro podría señalar que es muy difícil saber, porque no conocemos cuánto mide el huerto.

Al término de esta etapa los alumnos tienen los datos necesarios para resolver el problema, comprender la pregunta y, por lo tanto, saben qué información es la que se busca y, además, han propuesto distintas estrategias para resolver la situación.

El profesor dirige la revisión de cada una de las estrategias propuestas y explica el porqué de las que se desechan. Finalmente, se dejan las que podrían conducir a la solución del problema. Los alumnos, a nivel de grupo curso, desarrollan las estrategias seleccionadas. En el caso del ejemplo sería la representación gráfica y la suma de las fracciones. De no ser mencionada esta opción por los alumnos, el profesor la propondrá. Es importante que los alumnos intenten sumar las fracciones como ellos crean que se deben sumar. Sólo posteriormente el profesor señalará el procedimiento más adecuado si es que los alumnos por sí solos no lo descubren.

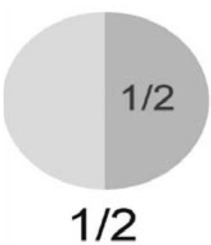
$$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3+2+1}{8}=\frac{6}{8}$$

Los alumnos recuerdan la pregunta y elaboran la respuesta, además de analizar la pertinencia de ambas estrategias utilizadas. ¿Qué resultado arrojó la representación gráfica? ¿Cuál es el resultado de la suma de las fracciones? ¿Cuál procedimiento llevó a la respuesta correcta? ¿En qué se diferencian ambos procedimientos?, ¿Qué opción representa mayores ventajas? El profesor desafía a los alumnos a resolver en grupo (4-5 alumnos) una nueva situación problema que implique la sustracción de fracciones, siguiendo el procedimiento utilizado anteriormente. Al término de esta etapa los alumnos se han introducido en la adición y sustracción de fracciones, han revisado distintas estrategias para resolver un problema y han resuelto en forma colaborativa la situación problema que se les planteó. Al finalizar la unidad didáctica se espera que los alumnos hayan resuelto una situación problema relacionada con la adición y sustracción de fracciones, siguiendo una serie de etapas. Además, deberían ser capaces de comprender que existen distintas d para resolver un problema, sin embargo, algunas representan mayor ventaja.

Principales dificultades que se presentan en el aprendizaje de las fracciones

El aprendizaje de las matemáticas, en general, y de las fracciones, en particular, presenta para los alumnos dificultades que pueden estar asociadas a factores psicológicos; pedagógicos o personales. Por lo tanto, a partir de algunas consideraciones de autores tales como Escalona y Noriega, (1975); Llinares y Sánchez, (1997); Castro, (2001), y Llinares, (2003), describimos algunas de las dificultades en el aprendizaje de las fracciones:

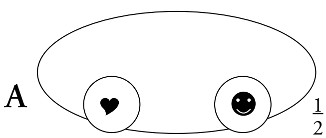
Dificultades asociadas a la Posición Espacial: El alumno escribe los números sobre o bajo la barra, sin tener claridad respecto a su ubicación espacial. Es decir, no ha interiorizado que el número que representa la parte sombreada se escribe sobre la barra, y que el número que representa las partes en que se divide el área (círculo, rectángulo, cuadrado, etc.) se escribe debajo de la barra.



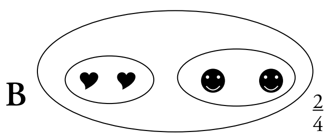
Ejemplo
El numerador 1, indica el número de partes o subconjuntos considerados. El denominador, indica las partes congruentes en que se ha dividido la unidad

Dificultades en conocimientos previos como la Noción de Conjunto

A fin de entender la equivalencia, el alumno debe tener la noción de conjunto.



$\frac{1}{2}$ de elementos de A



$\frac{2}{4}$ de elementos de B

Si tenemos:

En ambos casos se debe comparar uno con dos, es decir *un subconjunto con los 2* *subconjuntos formados en el conjunto.* De tal modo, que el número de elementos del subconjunto será la mitad del número total de elementos del conjunto.

Ejemplo: en el conjunto B: $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$

Dificultades en el Orden de Fracciones y Uso de la Recta Numérica.

Frente a la complejidad del uso y ubicación de racionales en la recta numérica las dificultades se presentan cuando el denominador es un número natural distinto a 0. es importante recordar que no tiene sentido hablar de 1 unidad dividida en 0 partes. Escalona y Noriega (1975), indican que es necesario que el alumno comprenda que el segmento *unidad* se dividirá en dos partes congruentes para indicar medios o mitades; si contamos una de estas partes el punto corresponde a ½.

Como ejemplo, plantea que al localizar ¾, se divide el segmento unidad en cuatro partes congruentes y contamos 3 de estas partes

Escalona y Noriega (1975) señalan que para comparar fracciones y ordenarlas se puede recurrir al uso de cajas divisoras, o de otros recursos pedagógicos de apoyo. A modo de ejemplo:

<table>
<tr><td colspan="4">Figura A</td></tr>
<tr><td colspan="4">1</td></tr>
<tr><td colspan="2">1/2</td><td colspan="2">1/2</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td>1/4</td><td>1/4</td><td>1/4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="6">Figura B</td></tr>
<tr><td colspan="6">1</td></tr>
<tr><td colspan="2">1/3</td><td colspan="2">1/3</td><td colspan="2">1/3</td></tr>
<tr><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td></tr>
</table>

En la figura A se puede apreciar que ½ es mayor que ¼, o bien que $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ es menor que $\frac{1}{2}$; en tanto, $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

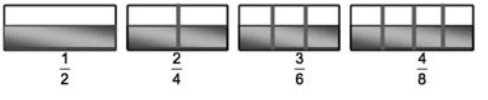
En la figura B, $\frac{1}{3}$ es mayor que $\frac{1}{6}$,o sea, $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$

Podemos concluir que dadas dos fracciones de igual numerador, es mayor la que tenga menor denominador.

Dificultades en Fracciones Equivalentes

La mayor dificultad se presenta en la representación simbólica que el alumno debe hacer. A fin de reforzar esta noción, se debe iniciar el trabajo con material concreto y/o con apoyo visual, tal como se ejemplifica a continuación.

En las representaciones rectangulares que siguen las partes sombreadas son:



Dificultades en la adición y sustracción de Fracciones con igual denominador.

Sumar fracciones de igual denominador, es obtener otras fracciones que tengan como numerador la suma de los numeradores, y un denominador común de las fracciones. En tanto, para sustraer dos fracciones de igual denominador restamos los numeradores y conservamos el mismo denominador.

Evaluación de las competencias implicadas en el aprendizaje de las fracciones

Como el objetivo del trabajo es proporcionar herramientas prácticas que orienten la tarea docente, presentamos en la Tabla 1 una serie de competencias posibles de ser evaluadas. Éstas han sido adaptadas de los planteamientos de Llinares (2003).

Es necesario considerar la evaluación como un proceso continuo, y junto con ello sugerimos que la evaluación tenga un carácter participativo (desde el profesor, entre compañeros y una evaluación personal). También creemos que los resultados de una evaluación pueden ser más consistentes, si se emplean diversos momentos y espacios para su aplicación, fundamentalmente por los componentes afectivos implicados en el aprendizaje.

Tabla 1: Instrumento de evaluación de competencias implicadas en el aprendizaje de las fracciones

Competencias	**Valoración**[3]		
	L	**E/P**	**N/L**
I. Comprensión Conceptual			
Comprende el concepto de fracción			
Comprende el concepto de equivalencia			
II. Eficacia en los procedimientos			
Identifica datos iniciales			
Reconoce la pregunta			
Ejecuta la tarea			
Comprueba el procedimiento			
III. Pensamiento estratégico			
Propone distintas estrategias			
Selecciona la más eficiente			
Explica el patrón utilizado para resolver la situación			
Representa la situación utilizando lenguaje matemático			
Transfiere el saber a situaciones similares			
IV. Comunicación			
Lee fracciones			
Escribe fracciones			
Grafica situaciones fraccionarias			
Explica y organiza sus ideas			
Comunica la solución a la que llega			
Defiende sus planteamientos			
Contraargumenta sus ideas con las de sus compañeros			
V. Actitudes			
Participa en las situaciones propuestas			
Trabaja colaborativamente			
Asume compromiso con la tarea			

[3] Logrado (L): El estudiante proporciona diferentes patrones para resolver situaciones, y es capaz de distinguir la más eficiente, puede transferir. En Proceso (E/P): El estudiante logra parcialmente el aprendizaje, reconoce algunos elementos pero no logra una comprensión apropiada. Sin Lograr (S/L): El estudiante no evidencia comprensión respecto de la situación.

Consideraciones finales e implicancias educativas

Las situaciones didácticas han sido elaboradas desde un enfoque multidisciplinar en coherencia con las áreas de experticia de los autores, lo que ofrece una respuesta más integradora de la enseñanza de las fracciones. Las situaciones han sido probadas en la práctica, por lo que las respuestas que suponemos podrían dar los alumnos se basan en estas experiencias. Con ello, no queremos desestimar la incertidumbre propia de una situación de aprendizaje que *siempre* va a estar mediada por el contexto en que ocurre. El marco conceptual que hemos empleado proviene de la investigación en fracciones como objeto de conocimiento matemático y de las teorías socio-constructivistas del aprendizaje, destacando el rol activo del alumno y el rol mediador del profesorado. Estamos seguros que a través de tareas colaborativas que promuevan conversaciones e intercambio de ideas entre profesores y estudiantes, el conocimiento sobre el objeto matemático (fracciones) se verá enriquecido con nuevos significados. Esto ocurre cuando los modelos espontáneos de razonamiento son confrontados y llegan a comprensiones más refinadas entre los participantes implicados en una situación de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

REFERENCIAS

Balabasquer, Gerardo (1996). *El concepto de derivada y sus aplicaciones*. España: Ediciones Akal

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage

Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Editor). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. (pp. 285-311). Madrid: Síntesis S.A.

Escalona, F. y Noriega, M. (1975). *Didáctica de la matemática en la Escuela Primaria 2*. Buenos Aires: Kapelusz S.A.

Espinoza, Lorena; Mitrovich, Dinko (2001). *Estudiar matemática en el segundo ciclo básico: Campo de problemas en torno a las fracciones*. Programa P-900. DEG, Ministerio de Educación de Chile.

García, A. (1999). *Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas. Números y álgebra*. España: Ediciones de Universidad Autónoma de Madrid

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En Chamorro, M. *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Prentice Hall

Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Editorial Síntesis

Valls, J. (2007). *Documento de trabajo curso Didáctica de las Matemáticas*. Universidad de Alicante. España